Un tour d'horizon des mathématiques tropicales

Antoine Béreau

Rencontres Doctorales Lebesgue

Vendredi 21 avril 2023

Les mathématiques tropicales :

- s'intéressent au semi-corps $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$;

Les mathématiques tropicales :

- s'intéressent au semi-corps $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$;
- ont émergé dans les années 1980 ;

Les mathématiques tropicales :

- s'intéressent au semi-corps $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$;
- ont émergé dans les années 1980 ;
- constituent un langage naturel pour décrire des problèmes d'optimisation/de théorie des jeux ;

Les mathématiques tropicales :

- s'intéressent au semi-corps $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$;
- ont émergé dans les années 1980 ;
- constituent un langage naturel pour décrire des problèmes d'optimisation/de théorie des jeux ;
- permettent de transformer des objets algébriques *a priori* compliqués en des objets polyédraux dont les propriétés combinatoires traduisent des propriétés algébriques de l'objet de base.

1. **Que sont les mathématiques tropicales ?**
   - Le semi-corps tropical
   - Les polynômes tropicaux

2. **Interactions des mathématiques tropicales avec les autres domaines**
   - Quelques exemples de problèmes d'optimisation
   - Un point de vue plus algébrique

3. **Mon sujet de thèse**
   - Position du problème
   - Présentation des méthodes de résolution
   - Quelques images sans paroles

I - Que sont les mathématiques tropicales ?

I - Que sont les mathématiques tropicales ?

❶ - Le semi-corps tropical

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
    - addition $\oplus := \max$

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
  - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
  - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;
  - multiplication $\odot := +$;

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
  - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;
  - multiplication $\odot := +$;
  - neutre additif $\mathbb{0} := -\infty$ (ou $+\infty$) ;

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
  - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;
  - multiplication $\odot := +$;
  - neutre additif $\mathbb{0} := -\infty$ (ou $+\infty$) ;
  - neutre multiplicatif $\mathbb{1} := 0$.

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
  - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;
  - multiplication $\odot := +$;
  - neutre additif $\mathbb{0} := -\infty$ (ou $+\infty$) ;
  - neutre multiplicatif $\mathbb{1} := 0$.
- Les propriétés habituelles d'un corps sont satisfaites, à l'exception que l'addition tropicale n'admet pas d'élément opposé.

- **Semi-anneau tropical** $\mathbb{R}_\infty = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ avec
    - addition $\oplus := \max$ (ou min selon les conventions) ;
    - multiplication $\odot := +$;
    - neutre additif $\mathbb{0} := -\infty$ (ou $+\infty$) ;
    - neutre multiplicatif $\mathbb{1} := 0$.
- Les propriétés habituelles d'un corps sont satisfaites, à l'exception que l'addition tropicale n'admet pas d'élément opposé.
- Les opérations tropicales s'étendent naturellement aux vecteurs et aux matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_\infty$, ce qui nous permet de parler d'**algèbre linéaire tropicale**.

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7)$

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7) = \max(5, -7) = 5$;

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7) = \max(5, -7) = 5$;
- $a \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus a = \max(a, -\infty) = a$;

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7) = \max(5, -7) = 5$;
- $a \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus a = \max(a, -\infty) = a$;
- Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_\infty$,

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a + \max(b, c) \\ &= \max(a + c, b + c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \end{aligned}$$

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7) = \max(5, -7) = 5$;
- $a \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus a = \max(a, -\infty) = a$;
- Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_\infty$,

$$
\begin{aligned}
a \odot (b \oplus c) &= a + \max(b, c) \\
&= \max(a + c, b + c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)
\end{aligned}
$$

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation $a \oplus x = b$

Quelques exemples pour s'échauffer :

- $5 \oplus (-7) = \max(5, -7) = 5$;
- $a \oplus \mathbb{0} = \mathbb{0} \oplus a = \max(a, -\infty) = a$;
- Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_\infty$,

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a + \max(b, c) \\ &= \max(a + c, b + c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \end{aligned}$$

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation $a \oplus x = b$ admet une solution $x \in \mathbb{R}_\infty$ ssi $b \geq a$, auquel cas la solution est $x = b$.

I - Que sont les mathématiques tropicales ?

❷ - Les polynômes tropicaux

- Un **polynôme tropical formel** p en n variables est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ \alpha & \longmapsto & p_\alpha \end{array}$$

telle que $p_\alpha \neq \mathbb{0}$ seulement pour un nombre fini de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On note alors $p = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} p_\alpha x^\alpha$.

- Un **polynôme tropical formel** p en n variables est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ \alpha & \longmapsto & p_\alpha \end{array}$$

  telle que $p_\alpha \neq \mathbb{0}$ seulement pour un nombre fini de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On note alors $p = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} p_\alpha x^\alpha$.
- Le **support** de p est l'ensemble $\mathrm{supp}(p) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : p_\alpha \neq \mathbb{0}\}$.

- Un **polynôme tropical formel** p en n variables est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ \alpha & \longmapsto & p_\alpha \end{array}$$

  telle que $p_\alpha \neq \mathbb{0}$ seulement pour un nombre fini de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On note alors $p = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} p_\alpha x^\alpha$.
- Le **support** de p est l'ensemble $\operatorname{supp}(p) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : p_\alpha \neq \mathbb{0}\}$.
- La **fonction polynomiale tropicale** associée à p est donnée par

$$\hat{p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ x & \longmapsto & \hat{p}(x) := \max_{\alpha \in \mathcal{A}}(p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \end{array} \right.$$

  avec $\mathcal{A} = \operatorname{supp}(p)$.

- Un **polynôme tropical formel** p en n variables est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ \alpha & \longmapsto & p_\alpha \end{array}$$

telle que $p_\alpha \neq \mathbb{0}$ seulement pour un nombre fini de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On note alors $p = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} p_\alpha x^\alpha$.
- Le **support** de p est l'ensemble $\mathrm{supp}(p) := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : p_\alpha \neq \mathbb{0}\}$.
- La **fonction polynomiale tropicale** associée à p est donnée par

$$\hat{p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\infty \\ x & \longmapsto & \hat{p}(x) := \max_{\alpha \in \mathcal{A}}(p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{A} = \mathrm{supp}(p)$.

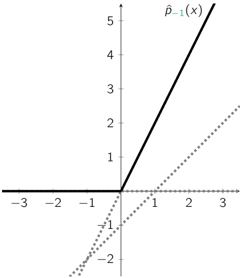
Remarque : Une fonction polynomiale tropicale est une fonction convexe, affine par morceaux avec des pentes entières.

Exemple : Pour $p_a = x^2 \oplus ax \oplus 0 \in \mathbb{R}_\infty[x]$, on a

$$\hat{p}_a(x) = \max(2x, x + a, 0) \quad .$$

Exemple : Pour $p_a = x^2 \oplus ax \oplus 0 \in \mathbb{R}_\infty[x]$, on a

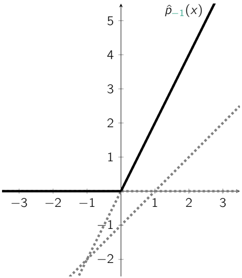
$$\hat{p}_a(x) = \max(2x, x + a, 0) \quad .$$



$a = -1$

Exemple : Pour $p_a = x^2 \oplus ax \oplus 0 \in \mathbb{R}_\infty[x]$, on a

$$\hat{p}_a(x) = \max(2x, x + a, 0) \quad .$$



$a = -1$ $\qquad$ $a = 0$

Exemple : Pour $p_a = x^2 \oplus ax \oplus 0 \in \mathbb{R}_\infty[x]$, on a

$$\hat{p}_a(x) = \max(2x, x + a, 0) \quad .$$

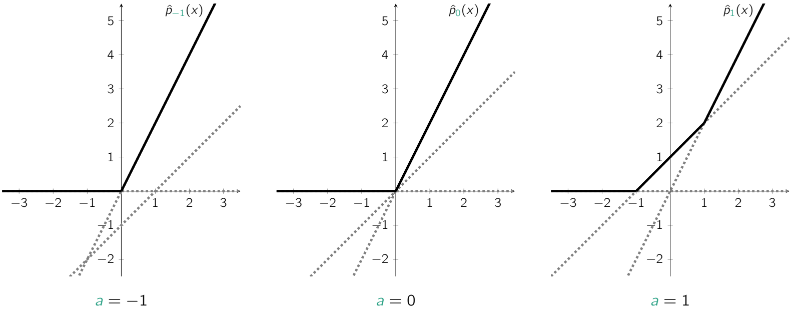


Figure: Le graphe de la fonction $\hat{p}_a$ pour différentes valeurs de a.

Exemple : Pour $p_a = x^2 \oplus ax \oplus 0 \in \mathbb{R}_\infty[x]$, on a

$$\hat{p}_a(x) = \max(2x, x + a, 0) \quad .$$

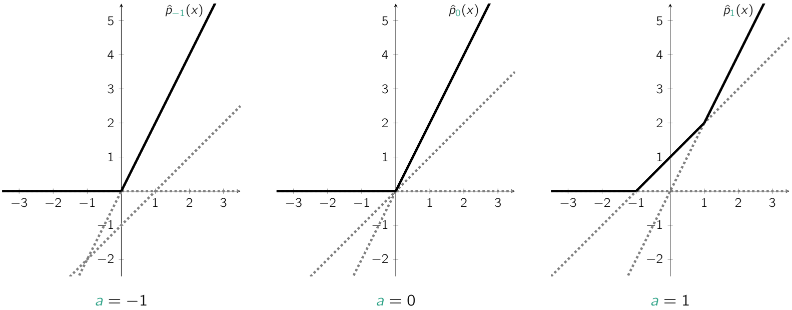


Figure: Le graphe de la fonction $\hat{p}_a$ pour différentes valeurs de a.

Deux polynômes tropicaux différent peuvent partager la même fonction polynomiale tropicale !

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}_\infty[x_1, x_2]$ les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2 \\ f_2 &= 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 &= 2x_1 \oplus 0x_2 \quad , \end{aligned}$$

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}_\infty[x_1, x_2]$ les polynômes suivants :

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2 \\ f_2 & = & 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 & = & 2x_1 \oplus 0x_2 \quad , \end{array}$$

les supports respectifs de f_1, f_2 et f_3 sont

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_1 & = & \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\} \\ \mathcal{A}_2 & = & \{(0,0),(1,0),(0,1)\} \\ \mathcal{A}_3 & = & \{(1,0),(0,1)\} \quad . \end{array}$$

On dit que $x \in \mathbb{R}_\infty^n$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \ .$$

On note alors $p(x) \ \nabla \ \mathbb{0}$.

On dit que $x \in \mathbb{R}^n_\infty$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \quad .$$

On note alors $p(x) \nabla \mathbb{0}$.

Exemple : Considérons à nouveau le polynôme tropical $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$. Alors :

On dit que $x \in \mathbb{R}_\infty^n$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \ .$$

On note alors $p(x) \nabla \mathbb{0}$.

Exemple : Considérons à nouveau le polynôme tropical $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$. Alors :

- $(0, 2)$

On dit que $x \in \mathbb{R}_\infty^n$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \quad .$$

On note alors $p(x) \nabla \mathbb{0}$.

Exemple : Considérons à nouveau le polynôme tropical $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$. Alors :

- $(0, 2)$ est une racine de f_1 car le maximum $\hat{f}_1(0, 2) = 3$ est atteint simultanément par les mônomes $1x_2$ et $1x_1x_2$;

On dit que $x \in \mathbb{R}_\infty^n$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \ .$$

On note alors $p(x) \nabla \mathbb{0}$.

Exemple : Considérons à nouveau le polynôme tropical $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$. Alors :

- $(0, 2)$ est une racine de f_1 car le maximum $\hat{f}_1(0, 2) = 3$ est atteint simultanément par les mônomes $1x_2$ et $1x_1x_2$;
- $(-1, 1)$

On dit que $x \in \mathbb{R}^n_\infty$ est une **racine** d'un polynôme p lorsque le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\hat{p}(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha \odot x^{\odot \alpha} = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (p_\alpha + \langle x, \alpha \rangle) \enspace .$$

On note alors $p(x) \nabla \mathbb{0}$.

Exemple : Considérons à nouveau le polynôme tropical $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$. Alors :

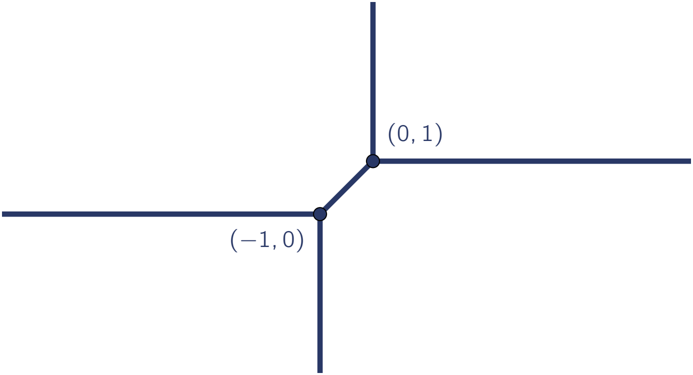
- $(0, 2)$ est une racine de f_1 car le maximum $\hat{f}_1(0, 2) = 3$ est atteint simultanément par les mônomes $1x_2$ et $1x_1x_2$;
- $(-1, 1)$ n'est pas une racine de f_1 car le maximum $\hat{f}_1(-1, 1) = 2$ est atteint uniquement par le monôme $1x_2$.

On peut alors considérer l'**hypersurface tropicale** associée à un polynôme tropical, c'est-à-dire l'ensemble des racines de ce polynôme tropical.

On peut alors considérer l'**hypersurface tropicale** associée à un polynôme tropical, c'est-à-dire l'ensemble des racines de ce polynôme tropical. Elle coïncide avec le lieu de non-différentiabilité de la fonction $\hat{f}_1$.

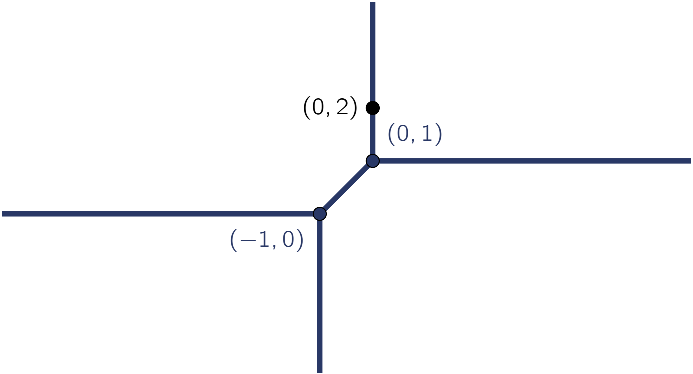
On peut alors considérer l'**hypersurface tropicale** associée à un polynôme tropical, c'est-à-dire l'ensemble des racines de ce polynôme tropical. Elle coïncide avec le lieu de non-différentiabilité de la fonction $\hat{f}_1$.

Exemple : L'hypersurface tropicale associée au polynôme $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$ a l'allure suivante.



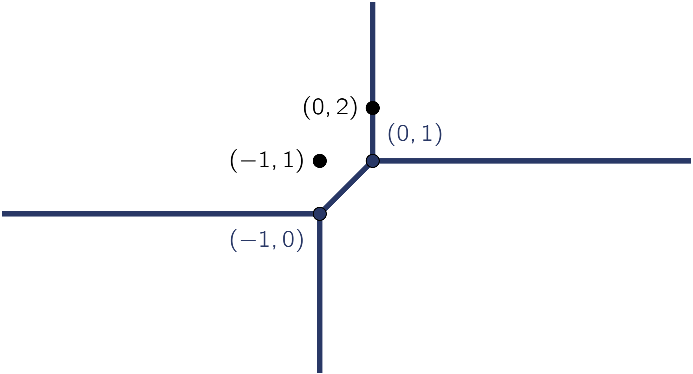
On peut alors considérer l'**hypersurface tropicale** associée à un polynôme tropical, c'est-à-dire l'ensemble des racines de ce polynôme tropical. Elle coïncide avec le lieu de non-différentiabilité de la fonction $\hat{f}_1$.

Exemple : L'hypersurface tropicale associée au polynôme $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$ a l'allure suivante.



On peut alors considérer l'**hypersurface tropicale** associée à un polynôme tropical, c'est-à-dire l'ensemble des racines de ce polynôme tropical. Elle coïncide avec le lieu de non-différentiabilité de la fonction $\hat{f}_1$.

Exemple : L'hypersurface tropicale associée au polynôme $f_1 = 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2$ a l'allure suivante.



De même, on dit que $y \in \mathbb{R}^m$ est un **zéro tropical** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ell,m}(\mathbb{R}_\infty)$ lorsque pour tout $1 \leq i \leq \ell$, le maximum dans l'expression suivante est atteint pour au moins deux valeurs de α :

$$\bigoplus_{j=1}^{m} a_{ij} \odot y_j = \max_{1 \leq j \leq m} (a_{ij} + y_j)$$

On note alors également $A \odot y \nabla \mathbb{0}$.

II - Interactions des mathématiques tropicales avec les autres domaines

II - Interactions des mathématiques tropicales avec les autres domaines

❶ - Quelques exemples de problèmes d’optimisation

Voici une liste non-exhaustive de problèmes d'optimisation avec une traduction naturelle en termes d'algèbre tropicale.

Le problème d'affectation optimale :

Le problème d'affectation optimale :

- Un commerçant dispose de n produits qu'il souhaite vendre à n clients à raison d'un produit par client.

Le problème d'affectation optimale :

- Un commerçant dispose de n produits qu'il souhaite vendre à n clients à raison d'un produit par client.
- Le client i propose d'acheter le produit j pour un prix p_{ij}.

Le problème d'affectation optimale :

- Un commerçant dispose de n produits qu'il souhaite vendre à n clients à raison d'un produit par client.
- Le client i propose d'acheter le produit j pour un prix p_{ij}.
- Le bénéfice maximale que peut réaliser le vendeur vaut

$$\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i\sigma(i)} \right) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{1\sigma(1)} \odot \cdots \odot p_{n\sigma(n)} \quad .$$

Le problème d'affectation optimale :

- Un commerçant dispose de n produits qu'il souhaite vendre à n clients à raison d'un produit par client.
- Le client i propose d'acheter le produit j pour un prix p_{ij}.
- Le bénéfice maximale que peut réaliser le vendeur vaut

$$\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i\sigma(i)} \right) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{1\sigma(1)} \odot \cdots \odot p_{n\sigma(n)} \quad .$$

- Cette quantité correspond à calculer le déterminant de la matrice $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ au sens tropical.

Le problème d'affectation optimale :

- Un commerçant dispose de n produits qu'il souhaite vendre à n clients à raison d'un produit par client.
- Le client i propose d'acheter le produit j pour un prix p_{ij}.
- Le bénéfice maximale que peut réaliser le vendeur vaut

$$\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i\sigma(i)} \right) = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{1\sigma(1)} \odot \cdots \odot p_{n\sigma(n)} \quad .$$

- Cette quantité correspond à calculer le déterminant de la matrice $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ au sens tropical.
- Il existe une unique solution au problème ssi $\det(P) \not\nabla \mathbb{0}$.

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

- $G = ([n], E)$ un graphe simple (orienté) pondéré à n sommets ;

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

- $G = ([n], E)$ un graphe simple (orienté) pondéré à n sommets ;
- à tout arc (i, j) on associe un poids $a_{ij} > 0$;

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

- $G = ([n], E)$ un graphe simple (orienté) pondéré à n sommets ;
- à tout arc (i, j) on associe un poids $a_{ij} > 0$;
- si $(i, j) \notin E$, on pose $a_{ij} = +\infty$;

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

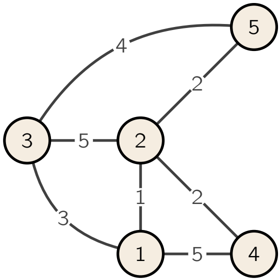
- $G = ([n], E)$ un graphe simple (orienté) pondéré à n sommets ;
- à tout arc (i, j) on associe un poids $a_{ij} > 0$;
- si $(i, j) \notin E$, on pose $a_{ij} = +\infty$;
- on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice d'adjacence du graphe G.

Recherche d'un chemin de poids minimal dans un graphe pondéré :

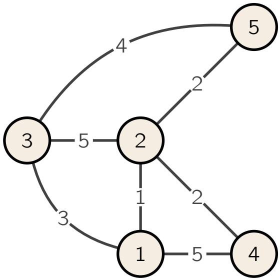
- $G = ([n], E)$ un graphe simple (orienté) pondéré à n sommets ;
- à tout arc (i, j) on associe un poids $a_{ij} > 0$;
- si $(i, j) \notin E$, on pose $a_{ij} = +\infty$;
- on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice d'adjacence du graphe G.

L'algorithme de Dijkstra permet de calculer le poids minimal d'un chemin reliant deux sommets donnés. L'implémentation de cet algorithme revient à calculer la somme des puissances successives de la matrice A au sens tropical.

Exemple : Soit G le graphe suivant :



Exemple : Soit G le graphe suivant :



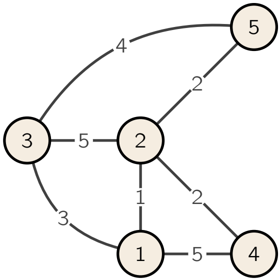
La matrice d'adjacence de G est $A = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 5 & \infty \\ 1 & \infty & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 4 \\ 5 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 4 & \infty & \infty \end{pmatrix}$.

- Le coefficient (i, j) de la matrice $A^{\odot k}$ correspond au poids minimal d'un chemin de longueur exactement k reliant i à j.

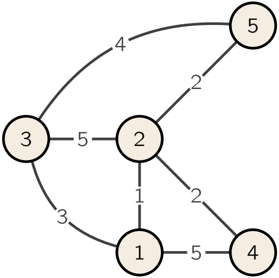
- Le coefficient (i, j) de la matrice $A^{\odot k}$ correspond au poids minimal d'un chemin de longueur exactement k reliant i à j.
- Le coefficient (i, j) de la matrice $A_k^* = A \oplus \cdots \oplus A^{\odot k}$ correspond au poids minimal d'un chemin de longueur au plus k reliant i à j.

- Le coefficient (i, j) de la matrice $A^{\odot k}$ correspond au poids minimal d'un chemin de longueur exactement k reliant i à j.
- Le coefficient (i, j) de la matrice $A_k^* = A \oplus \cdots \oplus A^{\odot k}$ correspond au poids minimal d'un chemin de longueur au plus k reliant i à j.
- La suite $(A_k^*)_{k \geq 1}$ est stationnaire pour à partir de $k = n$ au plus tard. On note A^* sa limite.

Dans l’exemple précédent,



Dans l'exemple précédent,



on trouve $A^* = A^*_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;

Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;
- jeu à deux joueurs Min et Max :

Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;
- jeu à deux joueurs Min et Max : à chaque tour, le joueur Max déplace un pion d'un sommet $i \in I$ vers un sommet $j \in J$ le long d'un arc (i, j) pondéré d'un poids b_{ij} et reçoit un paiement de b_{ij} de la part du joueur Min,

Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;
- jeu à deux joueurs Min et Max : à chaque tour, le joueur Max déplace un pion d'un sommet $i \in I$ vers un sommet $j \in J$ le long d'un arc (i, j) pondéré d'un poids b_{ij} et reçoit un paiement de b_{ij} de la part du joueur Min, puis le joueur Min déplace à son tour le pion en $j \in J$ vers un sommet $k \in I$ le long d'un arc pondéré d'un poids a_{kj} et reçoit à son tour un paiement de a_{kj} de la part de Max ;

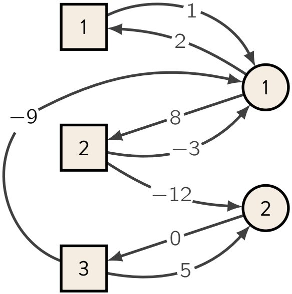
Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;
- jeu à deux joueurs Min et Max : à chaque tour, le joueur Max déplace un pion d'un sommet $i \in I$ vers un sommet $j \in J$ le long d'un arc (i, j) pondéré d'un poids b_{ij} et reçoit un paiement de b_{ij} de la part du joueur Min, puis le joueur Min déplace à son tour le pion en $j \in J$ vers un sommet $k \in I$ le long d'un arc pondéré d'un poids a_{kj} et reçoit à son tour un paiement de a_{kj} de la part de Max ;
- le joueur gagnant est celui qui obtient le plus grand paiement moyen par tour ;

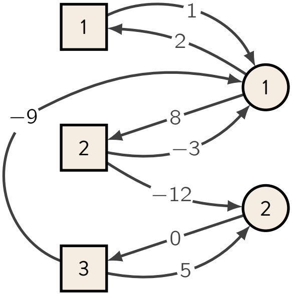
Les *mean pay-off games* (cf Akian, Gaubert et Guterman (2009)) :

- $G = (I \sqcup J, E)$ un graphe bipartite (fini) orienté pondéré ;
- jeu à deux joueurs Min et Max : à chaque tour, le joueur Max déplace un pion d'un sommet $i \in I$ vers un sommet $j \in J$ le long d'un arc (i, j) pondéré d'un poids b_{ij} et reçoit un paiement de b_{ij} de la part du joueur Min, puis le joueur Min déplace à son tour le pion en $j \in J$ vers un sommet $k \in I$ le long d'un arc pondéré d'un poids a_{kj} et reçoit à son tour un paiement de a_{kj} de la part de Max ;
- le joueur gagnant est celui qui obtient le plus grand paiement moyen par tour ;
- on considère les matrices $A = (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ et $B = (b_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$.

Exemple : Soit G le graphe suivant :



Exemple : Soit G le graphe suivant :



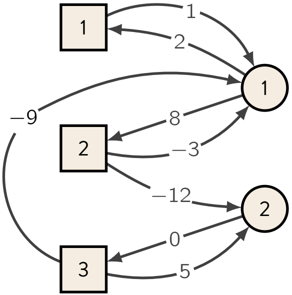
$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 2 & -\infty \\ 8 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -\infty \\ -3 & -12 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Théorème [AGG09] : Pour tout $j \in J$, le joueur Max a une stratégie positionnelle gagnante pour le *mean pay-off game* donné par les matrices de paiement A et B en jouant le coup initial j ssi il existe $y \in \mathbb{R}_{\infty}^{J}$ solution de l'inégalité matricielle tropicale $A \odot y \leq B \odot y$ tel que $y_j \neq \mathbb{0}$.

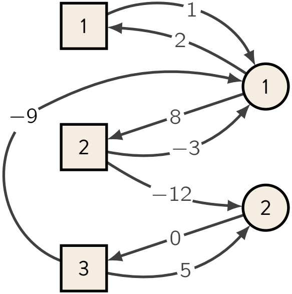
Théorème [AGG09] : Pour tout $j \in J$, le joueur Max a une stratégie positionnelle gagnante pour le *mean pay-off game* donné par les matrices de paiement A et B en jouant le coup initial j ssi il existe $y \in \mathbb{R}_{\infty}^{J}$ solution de l'inégalité matricielle tropicale $A \odot y \leq B \odot y$ tel que $y_j \neq \mathbb{0}$.

Les coups initiaux gagnant correspondent au support des solution de l'inégalité $A \odot y \leq B \odot y$.

Dans l'exemple précédent,

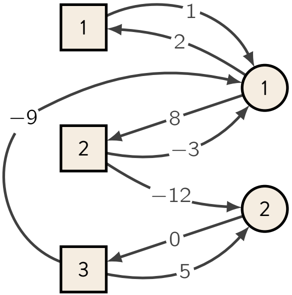


Dans l'exemple précédent,



on a $\quad A \odot y \leq B \odot y \iff \begin{cases} 2 + y_1 & \leq & 1 + y_1 \\ 8 + y_1 & \leq & \max(-3 + y_1, -12 + y_2) \\ y_2 & \leq & \max(-9 + y_1, 5 + y_2). \end{cases}$

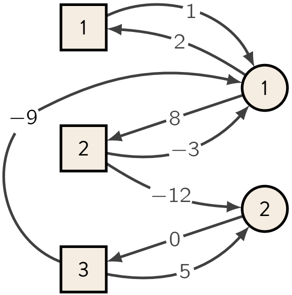
Dans l'exemple précédent,



on a $\quad A \odot y \leq B \odot y \iff \begin{cases} 2 + y_1 & \leq & 1 + y_1 \\ 8 + y_1 & \leq & \max(-3 + y_1, -12 + y_2) \\ y_2 & \leq & \max(-9 + y_1, 5 + y_2). \end{cases}$

La première inégalité montre que toute solution y à l'inégalité doit satisfaire $y_1 = \mathbb{0}$, ce qui entraîne que les deux autres inégalités sont satisfaites pour toute valeur de $y_2 \in \mathbb{R}_\infty$.

Dans l'exemple précédent,



on a $\quad A \odot y \leq B \odot y \iff \begin{cases} 2 + y_1 & \leq & 1 + y_1 \\ 8 + y_1 & \leq & \max(-3 + y_1, -12 + y_2) \\ y_2 & \leq & \max(-9 + y_1, 5 + y_2). \end{cases}$

La première inégalité montre que toute solution y à l'inégalité doit satisfaire $y_1 = \mathbb{0}$, ce qui entraîne que les deux autres inégalités sont satisfaites pour toute valeur de $y_2 \in \mathbb{R}_\infty$.

Cela se traduit par le fait que le coup 1 est perdant pour Max, alors que le coup 2 est lui gagnant.

II - Interactions des mathématiques tropicales avec les autres domaines

❷ - Un point de vue plus algébrique

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous x, $y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;
3. $\mathrm{val}(x + y) \geq \min(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ avec égalité si $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$.

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;
3. $\mathrm{val}(x + y) \geq \min(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ avec égalité si $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$.

Exemples :

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;
3. $\mathrm{val}(x + y) \geq \min(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ avec égalité si $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$.

Exemples :

- $\mathbb{Q}_p$ le corps des **nombres p-adiques** est muni de la valuation p-adique v_p ;

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **valuation** sur $\mathbb{K}$ est une application $\mathrm{val} : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $\mathrm{val}(x) = +\infty$ ssi $x = 0$;
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;
3. $\mathrm{val}(x + y) \geq \min(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ avec égalité si $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$.

Exemples :

- $\mathbb{Q}_p$ le corps des **nombres p-adiques** est muni de la valuation p-adique v_p ;
- $\mathbb{C}[[t^{\mathbb{R}}]] := \{x = \sum_{x \in \mathbb{R}} x_r t^r : \{r \in \mathbb{R} : x_r \neq 0\} \text{ bien ordonné}\}$ le corps des **séries de Puiseux** complexes univariées est muni de la valuation usuelle définie par $\mathrm{val}(x) = \min\{r \in \mathbb{R} : x_r \neq 0\}$.

Le point ❸ entraîne que pour tout polynôme $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$ avec $\mathcal{A} = \mathrm{supp}(f)$, si x est une racine de f, alors le minimum dans l'expression suivante est atteint deux fois :

$$\mathrm{val}\,(f(x)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathrm{val}(f_\alpha x^\alpha)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}(f_\alpha) + \langle \mathrm{val}(x), \alpha \rangle \ .$$

Le point ❸ entraîne que pour tout polynôme $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$ avec $\mathcal{A} = \mathrm{supp}(f)$, si x est une racine de f, alors le minimum dans l'expression suivante est atteint deux fois :

$$\mathrm{val}\,(f(x)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathrm{val}(f_\alpha x^\alpha)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}(f_\alpha) + \langle \mathrm{val}(x), \alpha \rangle \quad .$$

Ainsi, si x est une racine du polynôme f, alors $\mathrm{val}(x)$ est une racine tropicale du polynôme tropical $\mathrm{trop}(f) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}\,(f_\alpha)\, x^\alpha$.

Le point ❸ entraîne que pour tout polynôme $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$ avec $\mathcal{A} = \mathrm{supp}(f)$, si x est une racine de f, alors le minimum dans l'expression suivante est atteint deux fois :

$$\mathrm{val}\,(f(x)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathrm{val}(f_\alpha x^\alpha)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}(f_\alpha) + \langle \mathrm{val}(x), \alpha \rangle \quad .$$

Ainsi, si x est une racine du polynôme f, alors $\mathrm{val}(x)$ est une racine tropicale du polynôme tropical $\mathrm{trop}(f) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}\,(f_\alpha)\, x^\alpha$.

L'implication inverse n'est pas vraie la plupart du temps !

Le point ❸ entraîne que pour tout polynôme $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$ avec $\mathcal{A} = \mathrm{supp}(f)$, si x est une racine de f, alors le minimum dans l'expression suivante est atteint deux fois :

$$\mathrm{val}\,(f(x)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathrm{val}(f_\alpha x^\alpha)) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}(f_\alpha) + \langle \mathrm{val}(x), \alpha \rangle \quad .$$

Ainsi, si x est une racine du polynôme f, alors $\mathrm{val}(x)$ est une racine tropicale du polynôme tropical $\mathrm{trop}(f) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{val}\,(f_\alpha)\, x^\alpha$.

L'implication inverse n'est pas vraie la plupart du temps !

Théorème (Kapranov) : On a $\overline{\mathrm{val}\,(\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(f))} = \mathcal{V}_{\mathrm{trop}}\,(\mathrm{trop}(f))$.

III - Mon sujet de thèse

III - Mon sujet de thèse

❶ - Position du problème

On fixe désormais une collection $f_1, \ldots, f_k$ de polynômes tropicaux en n variables, de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_k$ et de supports $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$.

On fixe désormais une collection $f_1, \dots, f_k$ de polynômes tropicaux en n variables, de degrés respectifs $d_1, \dots, d_k$ et de supports $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$.

Question : Existe-t-il une racine $x \in \mathbb{R}^n$ commune à tous ces polynômes tropicaux, *i.e.* tel que $f_i(x) \nabla \mathbb{0}$ pour tout $1 \leq i \leq k$?

On fixe désormais une collection $f_1, \ldots, f_k$ de polynômes tropicaux en n variables, de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_k$ et de supports $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$.

Question : Existe-t-il une racine $x \in \mathbb{R}^n$ commune à tous ces polynômes tropicaux, *i.e.* tel que $f_i(x) \nabla \mathbb{0}$ pour tout $1 \leq i \leq k$?

Autrement dit, est-ce que la prévariété tropicale définie par $(f_1, \ldots, f_k)$ contient un point de $\mathbb{R}^n$?

On fixe désormais une collection $f_1, \dots, f_k$ de polynômes tropicaux en n variables, de degrés respectifs $d_1, \dots, d_k$ et de supports $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$.

Question : Existe-t-il une racine $x \in \mathbb{R}^n$ commune à tous ces polynômes tropicaux, *i.e.* tel que $f_i(x) \nabla \mathbb{0}$ pour tout $1 \leq i \leq k$?

Autrement dit, est-ce que la prévariété tropicale définie par $(f_1, \dots, f_k)$ contient un point de $\mathbb{R}^n$?

Remark : On s'intéresse seulement aux racines dans $\mathbb{R}^n$ car la recherche de racines dans $\mathbb{R}^n_\infty$ s'y ramène en considérant les supports des racines.

Figure: L'arrangement d'hypersurfaces tropicales des polynômes du système

$$(E_1) : \begin{cases} f_1 &= 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2 \\ f_2 &= 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 &= 2x_1 \oplus 0x_2 \ , \end{cases} .$$

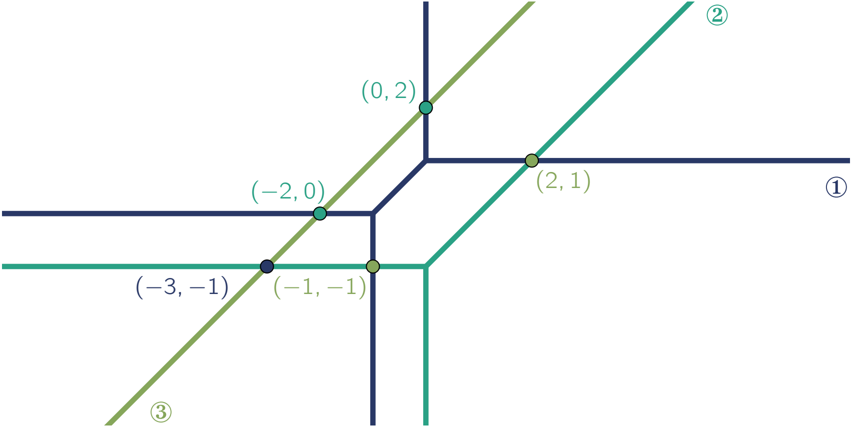
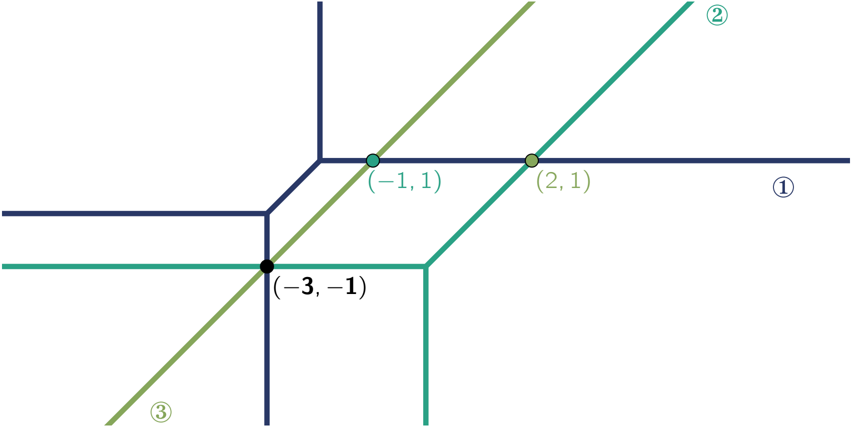


Figure: L'arrangement d'hypersurfaces tropicales des polynômes du système

$$(E_2) : \begin{cases} f_1 &= 1 \oplus 4x_1 \oplus 1x_2 \oplus 3x_1x_2 \\ f_2 &= 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 &= 2x_1 \oplus 0x_2 \ , \end{cases} .$$



III - Mon sujet de thèse

❷ - Présentation des méthodes de résolution

Classiquement, il existe deux types d'approches pour ces questions :

Classiquement, il existe deux types d'approches pour ces questions :

- la théorie des résultants

Classiquement, il existe deux types d'approches pour ces questions :

- la théorie des résultants
- les Nullstellensätze d'Hilbert

- **La théorie des résultants** :

- **La théorie des résultants** :

  L'idée générale consiste à déterminer un polynôme $\mathbb{R}$ appelé **résultant** en les coefficients de $f_1, \ldots, f_k$ tel que ce polynôme s'annule lorsqu'il y existe une racine commune à ces polynômes.

- **La théorie des résultants** :

  L'idée générale consiste à déterminer un polynôme $\mathbb{R}$ appelé **résultant** en les coefficients de $f_1, \ldots, f_k$ tel que ce polynôme s'annule lorsqu'il y existe une racine commune à ces polynômes.

  Sous certaines conditions techniques sur les supports, un tel polynôme $\mathbb{R}$ existe pour les système polynomiaux usuels.

Notre résultat :

Résultant tropical

Sous les hypothèses techniques précédentes et pour $k = n+1$, il existe un polynôme tropical $\mathcal{R}_{\text{trop}}$ en les coefficients de $f_1, \dots, f_{n+1}$ tel que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_i(x) \,\nabla\, \mathbb{0}$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$;
2. $\mathcal{R}_{\text{trop}}(f) \,\nabla\, \mathbb{0}$.

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ x_1 f_1 \\ \vdots \\ x^\alpha f_i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & \cdots & x^\beta & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ x_1 f_1 \\ \vdots \\ x^\alpha f_i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & \cdots & x^\beta & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ x_1 f_1 \\ \vdots \\ x^\alpha f_i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & \cdots & x^\beta & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ x_1 f_1 \\ \vdots \\ x^\alpha f_i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & \cdots & x^\beta & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & \cdots & f_{i,\beta-\alpha} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.
- Un sous-ensemble fini $\mathcal{E}$ de $\mathbb{Z}^n$ engendre une sous-matrice finie $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$, obtenue en conservant seulement les lignes dont le support est contenu dans $\mathcal{E}$, et les colonnes indicées par $\mathcal{E}$.

- **Nullstellensatz**: methode de linéarisation consistant à réduire la recherche d'une solution d'un système polynomial à la recherche d'éléments non triviaux dans le noyau d'une matrice.
- La **matrice de Macaulay** associée à f est la matrice infinie $\mathcal{M} = (m_{(i,\alpha),\beta})$ indicée par $([n] \times \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n$, où $m_{(i,\alpha),\beta}$ correspond au coefficient de x^β dans le polynôme $x^\alpha f_i$.
- Un sous-ensemble fini $\mathcal{E}$ de $\mathbb{Z}^n$ engendre une sous-matrice finie $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$, obtenue en conservant seulement les lignes dont le support est contenu dans $\mathcal{E}$, et les colonnes indicées par $\mathcal{E}$.
- Pour $\mathcal{E} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq N\}$, on pose $\mathcal{M}_N := \mathcal{M}_\mathcal{E}$.

Un Nullstellensatz tropical a été établi par Grigoriev et Podolskii (2018). Il utilise la sous-matrice $\mathcal{M}_N$ de $\mathcal{M}$ obtenue avec le degré de troncature $N = (n+2)(d_1 + \cdots + d_k)$.

Un Nullstellensatz tropical a été établi par Grigoriev et Podolskii (2018). Il utilise la sous-matrice $\mathcal{M}_N$ de $\mathcal{M}$ obtenue avec le degré de troncature $N = (n+2)(d_1 + \cdots + d_k)$. Plus précisément, leur résultat est le suivant :

Nullstellensatz tropical dual [GP18]

Les polynômes $f_1, \ldots, f_k$ ont une racine commune $x \in \mathbb{R}^n$ ssi il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ avec $m = \binom{N+n}{n}$ tel que $\mathcal{M}_N \odot y \; \nabla \; \mathbb{0}$ pour

$$N = (n+2)(d_1 + \cdots + d_k) \quad .$$

- Le problème de trouver un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{M}_N \odot y \, \nabla \, \mathbb{0}$ se ramène au problème de résoudre un *mean pay-off game* cf Akian, Gaubert et Guterman (2009).

- Le problème de trouver un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{M}_N \odot y \nabla \mathbb{0}$ se ramène au problème de résoudre un *mean pay-off game* cf Akian, Gaubert et Guterman (2009). La complexité polynomiale n'est pas démontrée mais c'est une méthode rapide en pratique.

- Le problème de trouver un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{M}_N \odot y \nabla \mathbb{0}$ se ramène au problème de résoudre un *mean pay-off game* cf Akian, Gaubert et Guterman (2009). La complexité polynomiale n'est pas démontrée mais c'est une méthode rapide en pratique.
- Cependant, le degré de troncature de Grigoriev et Podolskii ne correspond pas à la borne de Macaulay dans le cas usuel, qui vaut $d_1 + \cdots + d_{n+1} - n$ pour $k = n + 1$.

- Le problème de trouver un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{M}_N \odot y \nabla \mathbb{0}$ se ramène au problème de résoudre un *mean pay-off game* cf Akian, Gaubert et Guterman (2009). La complexité polynomiale n'est pas démontrée mais c'est une méthode rapide en pratique.
- Cependant, le degré de troncature de Grigoriev et Podolskii ne correspond pas à la borne de Macaulay dans le cas usuel, qui vaut $d_1 + \cdots + d_{n+1} - n$ pour $k = n + 1$. De plus, leur preuve ne prend pas en compte la structure potentiellement creuse des polynômes $f_1, \dots, f_k$.

Nos travaux améliorent le résultat de Grigoriev et Podolskii en prenant en compte le support des polynômes, et élimine notamment le facteur $n+2$ dans leur degré de troncature. Ils reposent sur une construction géométrique due à Canny et Emiris (1993), ainsi que Strumfels (1994).

Nos travaux améliorent le résultat de Grigoriev et Podolskii en prenant en compte le support des polynômes, et élimine notamment le facteur $n+2$ dans leur degré de troncature. Ils reposent sur une construction géométrique due à Canny et Emiris (1993), ainsi que Strumfels (1994).

Nullstellensatz pour les systèmes polynomiaux tropicaux creux

Le système $f \ \nabla \ \mathbb{0}$ possède une solution $x \in \mathbb{R}^n$ ssi il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}'}$ dans le noyau tropical de la sous-matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'}$ de $\mathcal{M}$, où $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ contenant un ensemble de Canny-Emiris $\mathcal{E}$ non vide.

Nos travaux améliorent le résultat de Grigoriev et Podolskii en prenant en compte le support des polynômes, et élimine notamment le facteur $n+2$ dans leur degré de troncature. Ils reposent sur une construction géométrique due à Canny et Emiris (1993), ainsi que Strumfels (1994).

Nullstellensatz pour les systèmes polynomiaux tropicaux creux

Le système $f \ \nabla\ \mathbb{0}$ possède une solution $x \in \mathbb{R}^n$ ssi il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}'}$ dans le noyau tropical de la sous-matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'}$ de $\mathcal{M}$, où $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ contenant un ensemble de Canny-Emiris $\mathcal{E}$ non vide.

Corollary: *The système $f \ \nabla\ \mathbb{0}$ possède une solution $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si le système linéaire de Macaulay tronqué $\mathcal{M}_N \odot y \ \nabla\ \mathbb{0}$ possède une solution $y \in \mathbb{R}^m$ pour $N = d_1 + \cdots + d_k$, où $d_i = \deg(f_i)$ pour tout $1 \leq i \leq k$.*

III - Mon sujet de thèse

❸ - Quelques images sans paroles

Considérons les systèmes

$$(E_1) : \left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & 1 \oplus 2x_1 \oplus 1x_2 \oplus 1x_1x_2 \\ f_2 & = & 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 & = & 2x_1 \oplus 0x_2 \ , \end{array} \right.$$

et

$$(E_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & 1 \oplus 4x_1 \oplus 1x_2 \oplus 3x_1x_2 \\ f_2 & = & 0 \oplus 0x_1 \oplus 1x_2 \\ f_3 & = & 2x_1 \oplus 0x_2 \ , \end{array} \right.$$

de mêmes supports respectifs

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}_1 & = & \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\} \\ \mathcal{A}_2 & = & \{(0,0),(1,0),(0,1)\} \\ \mathcal{A}_3 & = & \{(1,0),(0,1)\} \ . \end{array} \right.$$

Les polytopes de Newton associés aux systèmes (E_1) et (E_2) et leur somme de Minkowski :

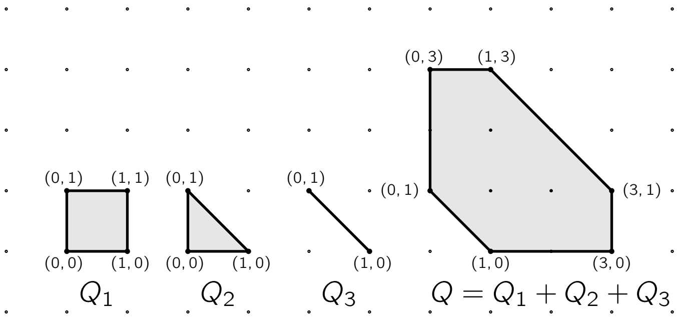
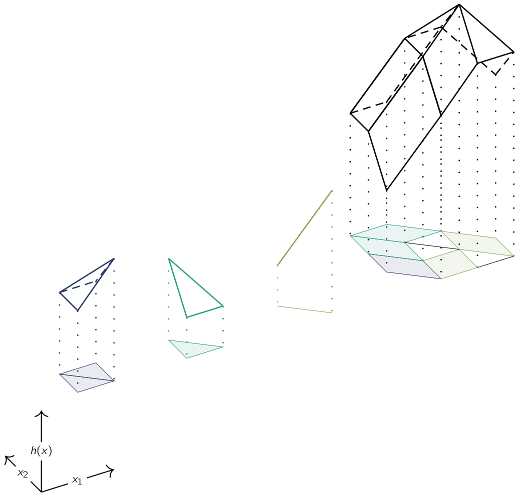
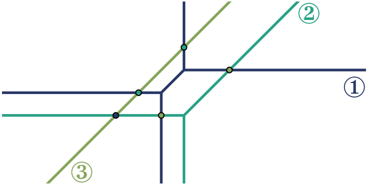


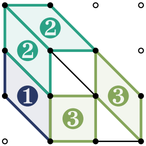
Figure: La subdivision de Q associée à (E_1) est obtenue par projection de la somme de Minkowski des polytopes de Newton etendus.



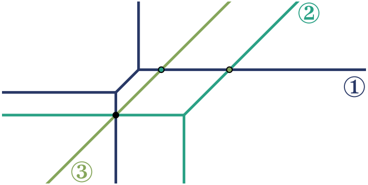
(a) L'arrangement d'hypersurfaces tropicales associé aux polynômes du système (E_1).



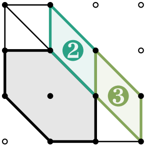
(b) La subdivision de Q associée à (E_1).



(c) L'arrangement d'hypersurfaces tropicales associé aux polynômes du système (E_2).



(d) La subdivision de Q associée à (E_2).



Pour $\delta = (-1+\varepsilon, -1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, on obtient l'ensemble de Canny-Emiris

$$\mathcal{E} := (Q+\delta) \cap \mathbb{Z}^n = \{(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2)\}$$

correspondant à l'ensemble de monômes $\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2\}$.

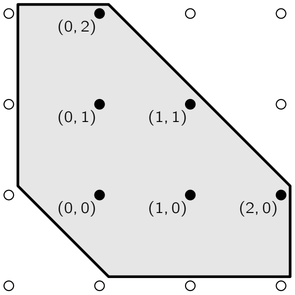


Figure: The polytope $Q+\delta$ with $\delta = (-0.9, -0.9)$.

Example: La matrice associée au système (E_1) est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{(1)} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{r} f_1 \\ f_2 \\ x_1f_2 \\ x_2f_2 \\ f_3 \\ x_1f_3 \\ x_2f_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & & 0 & 1 & \\ & & 0 & & 0 & 1 \\ & 2 & 0 & & & \\ & & & 2 & 0 & \\ & & & & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Il n'y a pas de vecteur $y \in \mathbb{R}^6$ dans le noyau tropical de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{(1)}$ et donc l'équation $f \ \nabla \ \mathbb{0}$ n'admet pas de solution $x \in \mathbb{R}^2$.

Example: La matrice associée au système (E_2) est

$$
\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{(2)} = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{matrix} \\
\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ x_1 f_2 \\ x_2 f_2 \\ f_3 \\ x_1 f_3 \\ x_2 f_3 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 4 & 1 & & 3 & \\
0 & 0 & 1 & & & \\
 & 0 & & 0 & 1 & \\
 & & 0 & & 0 & 1 \\
 & 2 & 0 & & & \\
 & & & 2 & 0 & \\
 & & & & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} .
$$

Le vecteur $y = \mathrm{ver}(-3, -1) = (0, -3, -1, -6, -4, -2) \in \mathbb{R}^6$ est dans le noyau tropical de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{(2)}$ et donc l'équation $f \ \nabla \ \mathbb{0}$ admet une solution $x \in \mathbb{R}^2$, qui est en effet donnée par $x = (-3, -1)$.

Merci pour votre attention !